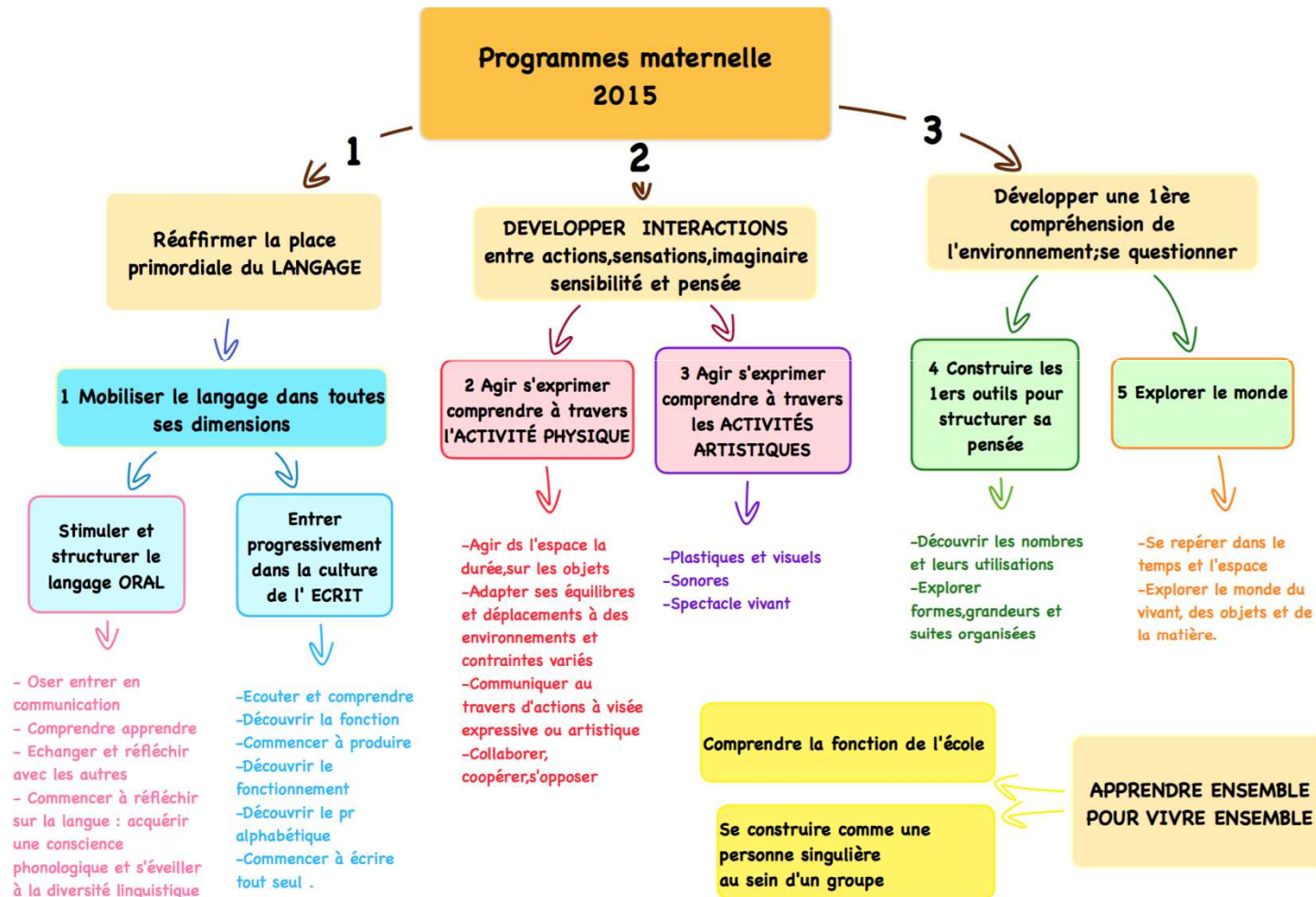


APPRENDRE ET ENSEIGNER



NOMBRES
et QUANTITÉS
à l'école maternelle

Programme 2015



Programme 2015

Construire les 1ers outils pour structurer sa pensée

4.1

- 1 Construire le nombre pour exprimer les quantités
- 2 Stabiliser la connaissance des petits nombres
- 3 Utiliser le nombre pour désigner un rang une posi...

4 Construire les 1ers savoirs et savoir-faire avec rigueur :

- . Acquérir la suite orale des mots-nombres
- . Écrire les nombres avec les chiffres
- . Dénombrer (éviter le comptage numérotage)

SP1 Evaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques

SP2a Réaliser une collection dont le cardinal est donné .
SP2b Utiliser le dénombrement pour comparer 2 qttés, pour constituer 1 coll d'une tai...

SP3 Utiliser le nbre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne ds un jeu, dans une situation organisée , sur un rang ou pour comparer des positions .

SP4 Mobiliser des symboles analogiques (constellations, doigts), verbaux ou écrits (dessins, schémas, chiffre), conventionnels ou non pour communiquer des infos orales...

4.1 DÉCOUVRIR LES NOMBRES ET LEURS UTILISATIONS



SP5 Avoir compris que la cardinalité ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.

SP6 Avoir compris que tt nombre s'obtient en ajoutant 1 au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente

SP7 a Quantifier des coll jusqu'à 10 au moins; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.

SP 7b Dire combien il faut ajouter ou enlever pour aller à des qttés ne dépassant pas 10.

SP9a Dire la suite des nombres jusqu'à 30.
SP9b Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à 10

SP8 Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.



Mise en réflexion préalable

- 3 groupes
- 1 niveau par groupe
- Décrire :
 - une situation pour utiliser les nombres
 - une situation pour étudier les nombres

The text is centered and surrounded by seven light purple circles. Three circles are arranged in a top row, and four circles are arranged in a bottom row. The top-left circle is an outline, while the other six are solid. The text "QU'EST-CE QU'UN NOMBRE ?" is superimposed over the top row of circles.

QU'EST-CE QU'UN NOMBRE ?

PYTHAGORE

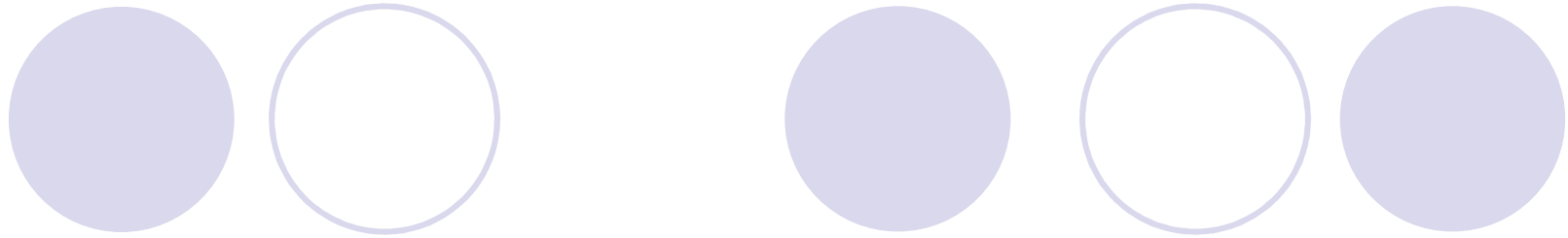
Le nombre est la cause et le principe de toute chose.

Un nombre est un concept permettant d'évaluer et de comparer des quantités ou des rapports de grandeurs, mais aussi d'ordonner des éléments par une numérotation.

PIAGET

Le nombre est classe et relation asymétrique fondue en un même tout opératoire.

Le nombre est un bidule indéfinissable dont la particularité est d'être situé entre un nombre et un autre nombre !



« Tout sujet apprenant le nombre doit se poser naturellement les mêmes questions que ses inventeurs pour le comprendre. »

Gregor REISCH

1503

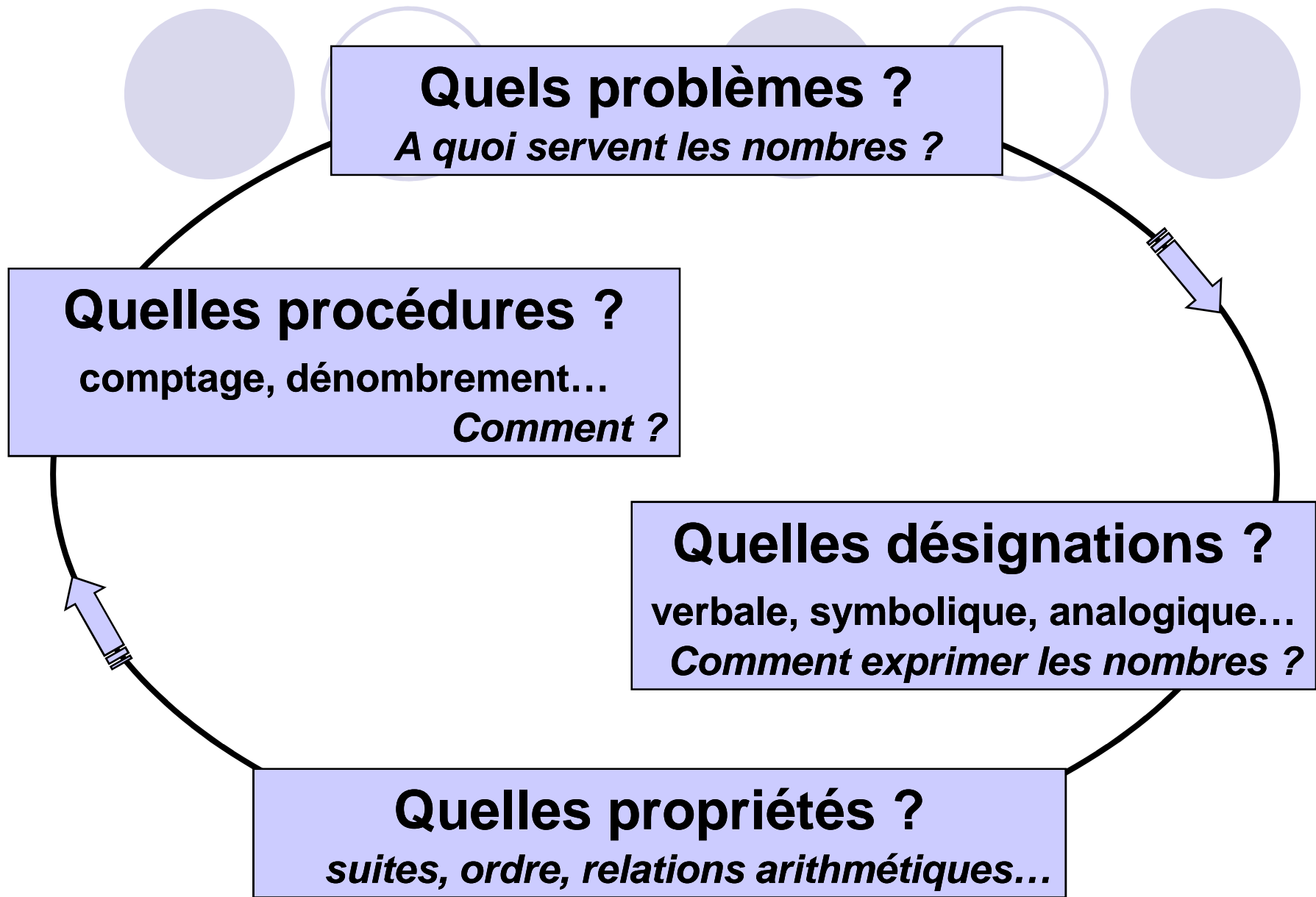
ABACISTES

Pythagore (-569 - -494)

ALGORISTES

Boèce (480-525)







À quoi servent les nombres ?

à communiquer à propos des quantités

à mémoriser des quantités

à anticiper et à calculer

à résoudre des problèmes



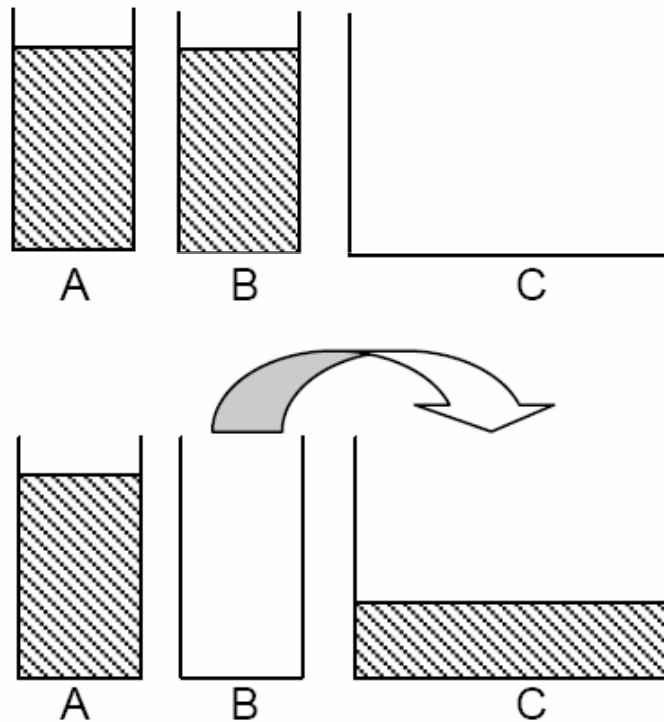
Qu'est-ce qu'un nombre ?

- Trois opérations logiques élémentaires sont indispensables à la maîtrise de la notion de nombre :
 - La conservation (des quantités)
 - L'inclusion
 - La sériation

Piaget et Szeminska - 1941

LA CONSERVATION DES QUANTITÉS

Piaget - 1941 - 40 enfants de 4 à 7 ans



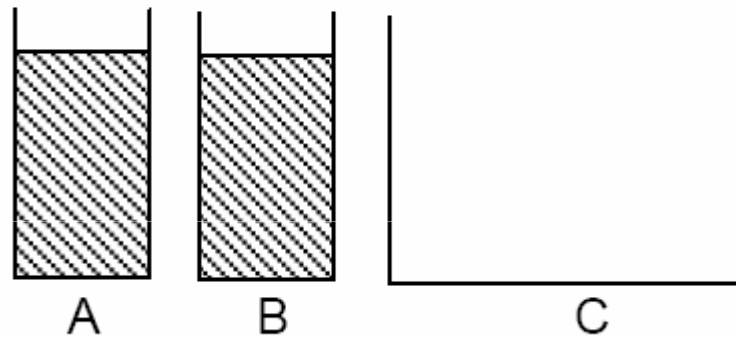
« C'est pareil ! »

4 ans	5 ans	6-7 ans
0 %	20 %	50 %

LA CONSERVATION DES QUANTITÉS

Françoise FRANCK transforme la situation de Piaget

Avant la transformation



Elle EXPLICITE ce qui va se passer mais sans le faire.

« C'est pareil ! »

4 ans	5 ans	6-7 ans
50 %	90 %	100 %

LA CONSERVATION DES QUANTITÉS

Elle le fait.

« C'est pareil ! »

4 ans	5 ans	6-7 ans
0 %	70 %	100 %

↳ tous les enfants se rétractent : le raisonnement mis en œuvre ne suffit pas.

Quelques temps après, elle refait l'expérience de Piaget :

« C'est pareil ! »

4 ans	5 ans	6-7 ans
0 %	70 %	90 %

**Manipuler d'abord et seulement ne sert pas à grand chose.
La manipulation première doit être celle de l'esprit.**

LA CONSERVATION DES QUANTITÉS

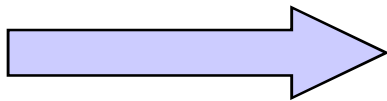
J.Piaget - 1941



« prendre pareil de jetons » noirs



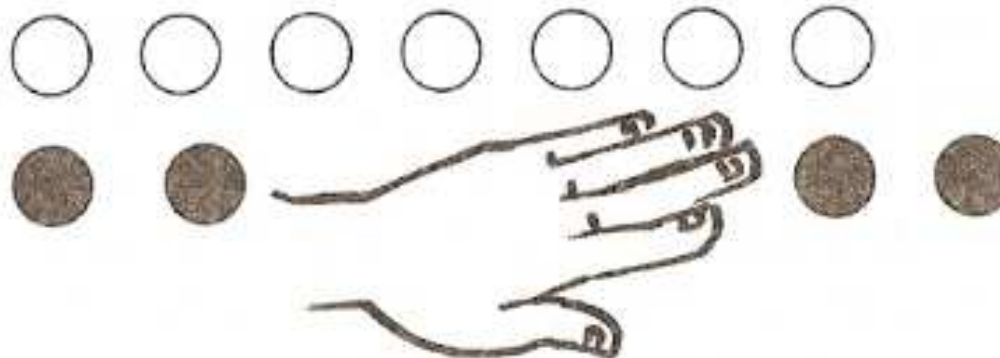
Plus de noirs ? Plus de blancs ? Pareil ?

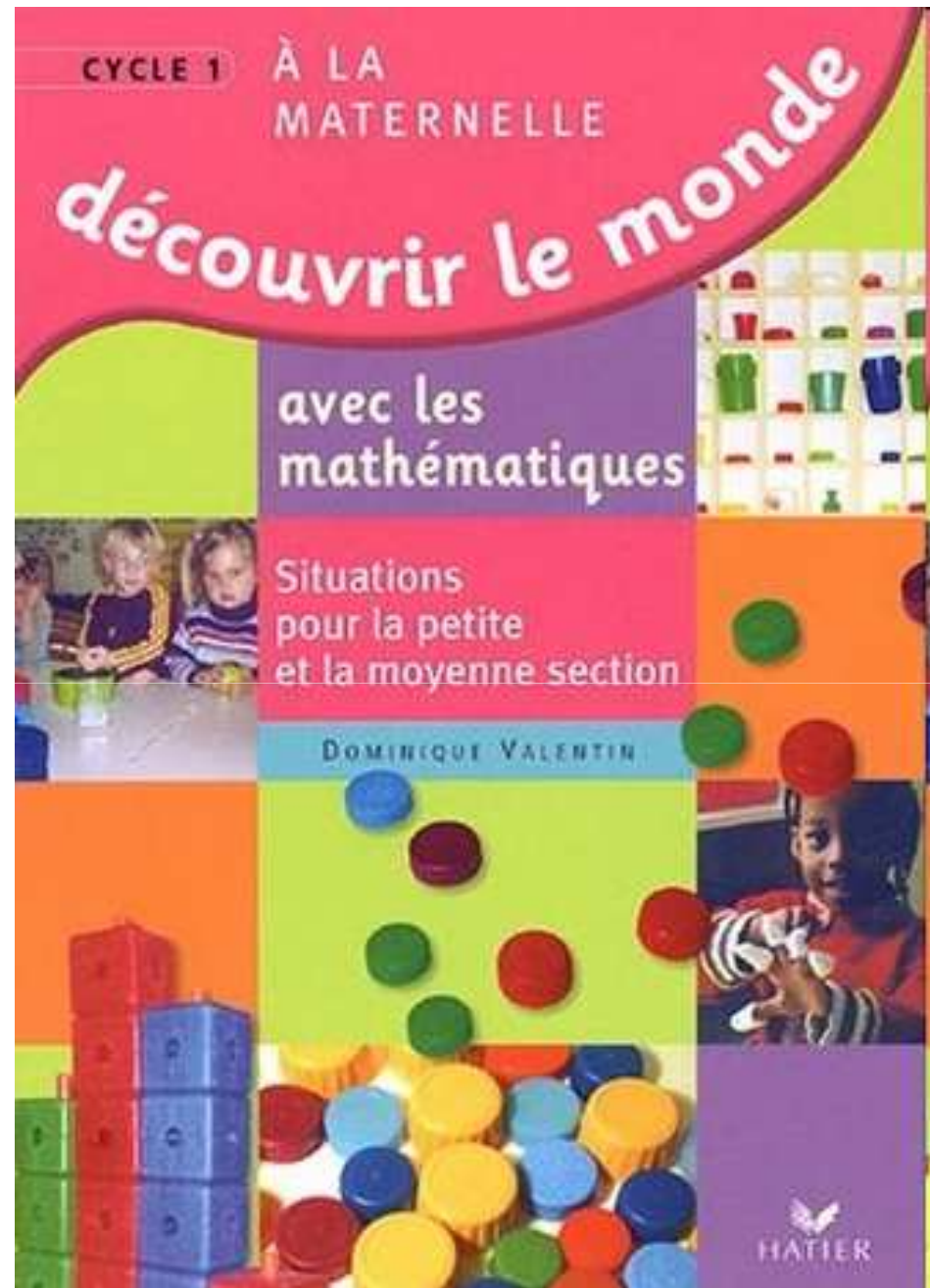
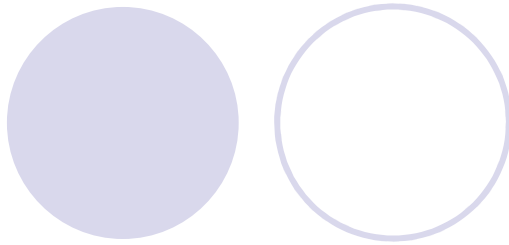


Jusque vers 6 ans, les enfants disent que la rangée des jetons écartés en contient plus...

LECTURE EMPIRIQUE DE LA RÉALITÉ

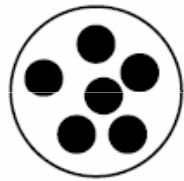
P.Gréco - 1962



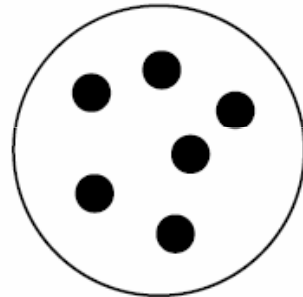


Description de la situation « **Les paires de boîtes** » en MS (*Découvrir le monde avec les mathématiques - situations pour la petite et la moyenne sections - Hatier - 2004 - pages 58 à 60*) dont l'objectif est de prendre conscience que le nombre d'éléments d'une collection ne dépend pas de l'espace qu'elle occupe.

Un enfant A commence : il met des billes chinoises dans sa boîte.
L'enfant B doit mettre autant de billes chinoises dans sa boîte (plus grande).



A

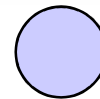


B

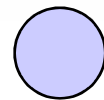


B doit souvent faire la preuve qu'il a répondu à la consigne (la variable « taille de la boîte » induit le doute, donc le problème et plus la différence de taille est importante et plus le doute est important). La tentation est grande de leur enseigner l'équipotence alors qu'ils doivent la construire !

TPS



OUZOULIAS





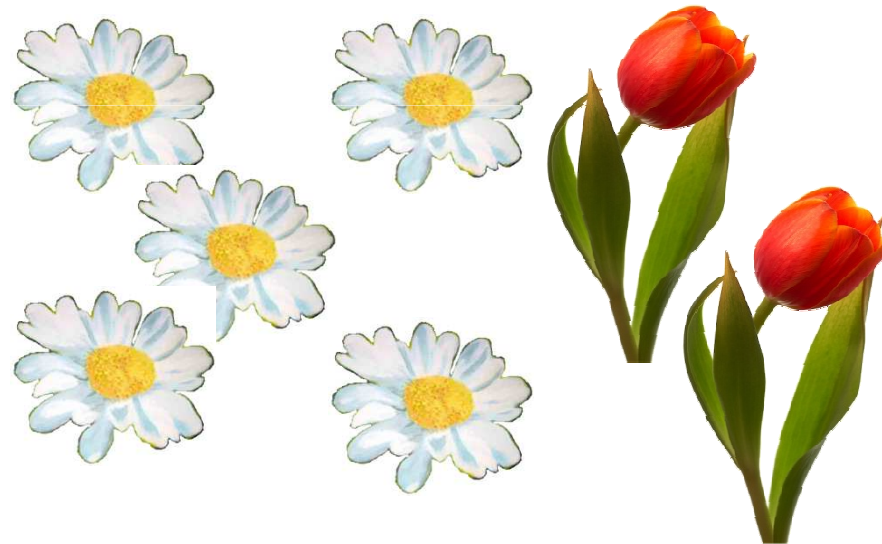
Qu'est-ce qu'un nombre ?

- Trois opérations logiques élémentaires sont indispensables à la maîtrise de la notion de nombre :
 - La conservation
 - L'inclusion
 - La sériation

Piaget et Szeminska - 1941

L'INCLUSION DE CLASSES

- Qu'est-ce qu'il y a le plus ?
- Des fleurs ou des marguerites ?



CARDINAL



L'INCLUSION DE CLASSES

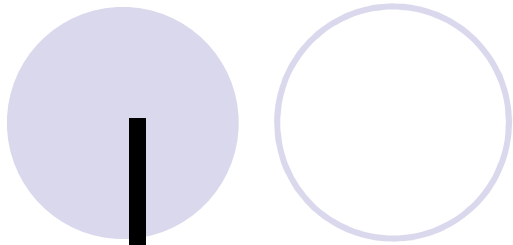
- Les réussites de type logique
- Les réussites de type empirique

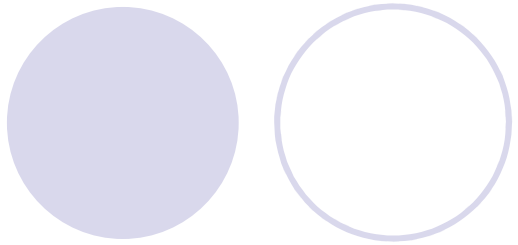


Qu'est-ce qu'un nombre ?

- Trois opérations logiques élémentaires sont indispensables à la maîtrise de la notion de nombre :
 - La conservation
 - L'inclusion
 - La sériation

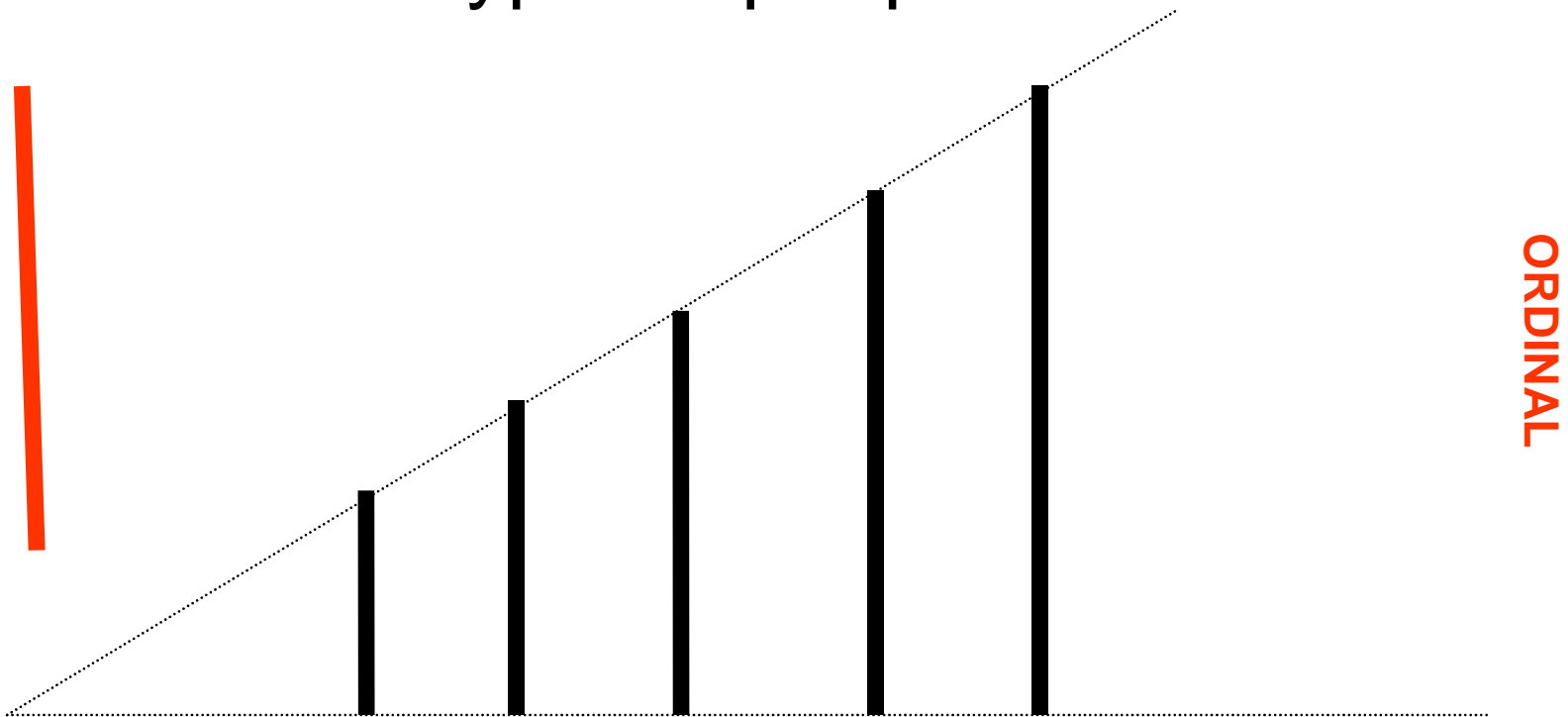
Piaget et Szeminska - 1941





LA SÉRIATION

La réussite de type empirique...



Conséquences pour l'enseignement

- Activités de classement (inclusion) et activités de rangement (sériation) à l'école maternelle
- Elles n'ont de sens (numérique) que vis-à-vis du langage qui les accompagne et qui rend compte de la réflexion de l'enfant (qu'elle soit logique ou empirique)...

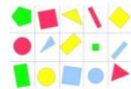
Programme 2015

Construire les 1ers outils pour structurer sa pensée

4.2

SP10a Classer des objets en fonction des caractéristiques liées à leur forme.

SP10b Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque rectangle)



SP10c Reconnaître quelques solides (cube, pyramide, sphère, cylindre)



SP11 Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.



**EXPLORER
DES FORMES
DES GRANDEURS
DES SUITES
ORGANISÉES**

SP14 Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application



SP12 Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides)



SP13 Reproduire, dessiner des formes planes.

Une autre approche



- Si les enfants ne sont pas « conservants » ou « incluants », il faut partir de ce qu'ils savent faire...
- connaissance de la comptine numérique comme préalable
- importance des activités de comptage
- mise en évidence de 5 principes qui régissent le comptage

*R. Gelman - 1983
« Les bébés et le calcul »*

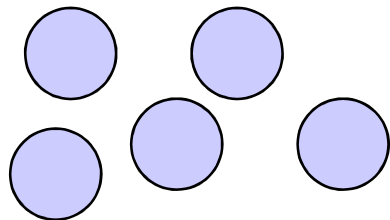
Cinq principes pour le comptage

1

- La **correspondance terme à terme** :
à chaque unité, il convient de faire correspondre un « mot-nombre » et un seul...

R. Gelman - 1983

« Les bébés et le calcul »



un



deux



trois



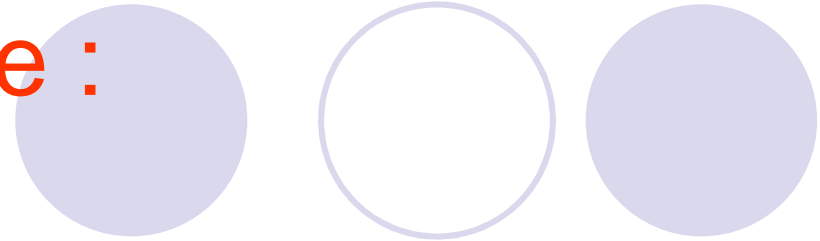
quatre



cinq



Comptine numérique : quelques étapes



Grande variabilité selon les enfants

(donc valeurs moyennes)

- **4 ans et demi** : récitation jusqu'à *seize*
- **5 ans et demi** : récitation jusqu'à *quarante*

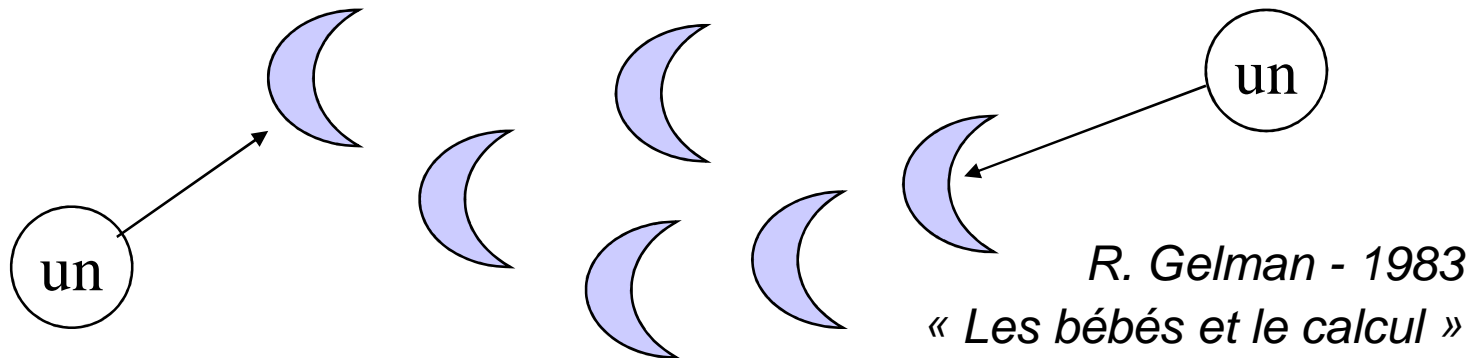
*Mais attention savoir réciter
n'est ni connaître complètement
ni savoir utiliser*

Dénombrement par comptage un à un : quelques repères

	3 ans	4 ans	5 ans
7 objets	19 %	47 %	80 %
11 objets	5 %	37 %	47 %

Cinq principes pour le comptage 2

- Une **suite stable** :
les « mots nombres »
doivent toujours être récités dans le même **ordre**
- Mémoriser une suite de mots
et la restituer **de la même manière**
dans des contextes qui peuvent varier.





Aspect algorithmique

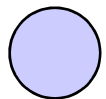
- « Rien ne justifie une étude des nombres un par un. »
- « Les premières situations doivent d'emblée se situer dans un domaine relativement étendu. »
- « On acceptera donc de travailler avec des nombres que l'enfant ne sait pas encore lire. »

Documents d'application, cycle2



Aspect algorithmique

- Produire des suites orales ou écrites
- Comparer des nombres
- Ranger des nombres
- Écrire des encadrements
- Situer *-précisément ou approximativement-* des nombres sur la droite graduée
- Travailler les désignations orales des nombres





Aspect algorithmique

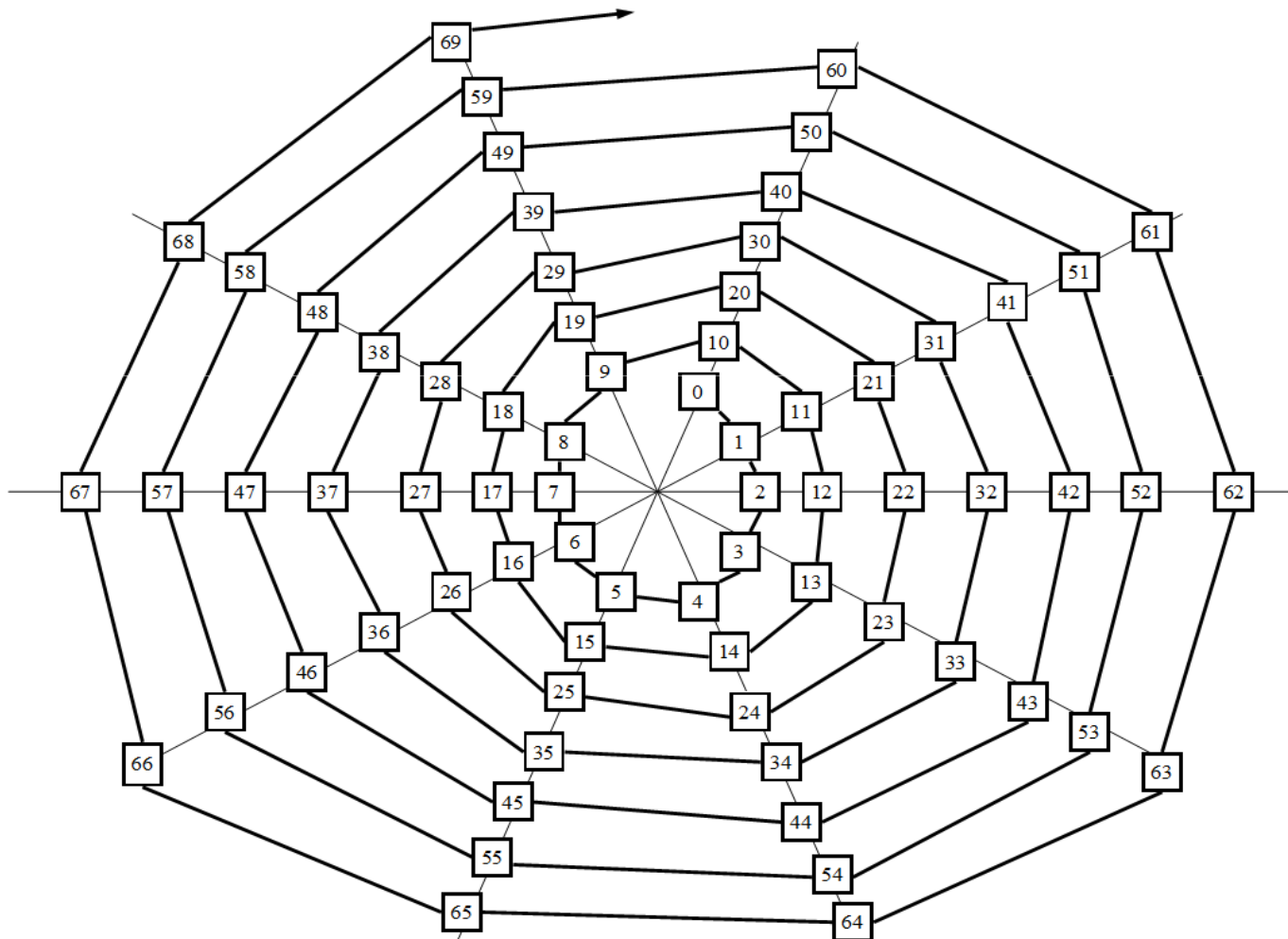
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

Le tableau des nombres

- Support jeux du portrait
 - Mobiliser les connaissances sur les nombres
 - Gérer des informations positives et négatives
 - Dire, lire, écrire en mathématiques

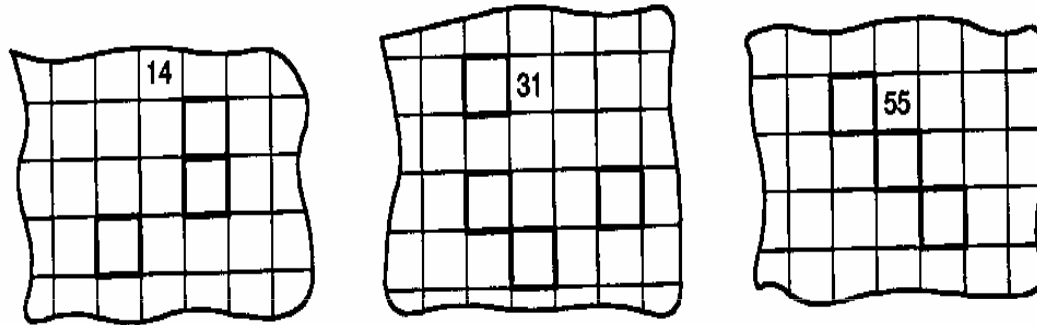
Ermel CP

La Spirale des nombres



Aspect algorithmique

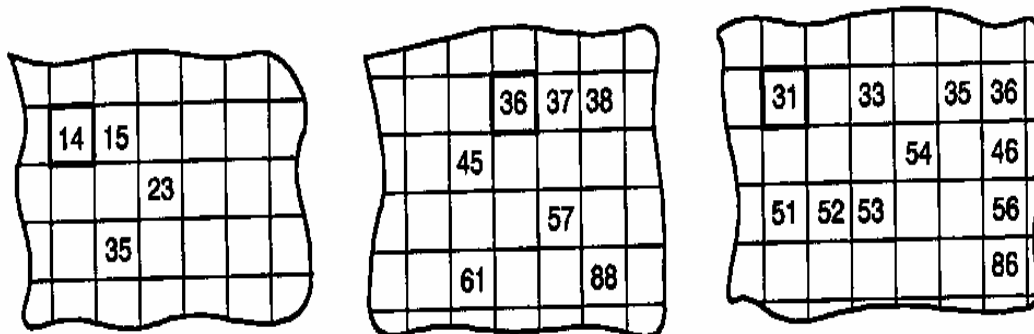
Extraits de tableau à compléter



- Comprendre la structuration de la suite écrite des nombres

Chasser l'intrus

Sur des extraits de tableaux, certaines cases sont remplies : il s'agit d'éliminer les nombres mal placés. Une des cases bien remplies est entourée pour servir de repère. C'est un exercice assez difficile.



un seul intrus

deux intrus (plus difficile)



du dénombrement
à la désignation écrite des quantités...

Pour faire le lien (mettre du sens) entre:

- l'aspect algorithmique de l'écriture chiffrée
- le fait que cette même écriture désigne une quantité

Il sera nécessaire de faire apparaître la signification de la position du chiffre au sein du nombre (en terme de groupements par dix),

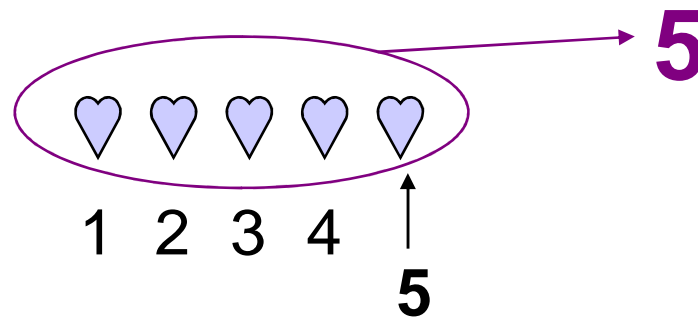
d'où

GROUPEMENTS / ÉCHANGES

Cinq principes pour le comptage

3

- Principe **cardinal** : le dernier « mot nombre » prononcé réfère à l'ensemble
- La question du « combien ? »



R. Gelman - 1983
« Les bébés et le calcul »

→ développer la mémorisation des collections-témoins en prenant appui sur des constellations universelles...

INTERMÈDE



- Collections témoins et bande numérique
 - structurer et organiser l'espace en PS
 - privilégier la numération orale
 - utiliser des **albums à compter**
 - proposer des repères en fin de PS et MS
 - cartapoints
 - systématiser la relation code oral / code écrit en GS
- <http://maternailes.net/marrons/fruitsdautomne.html>

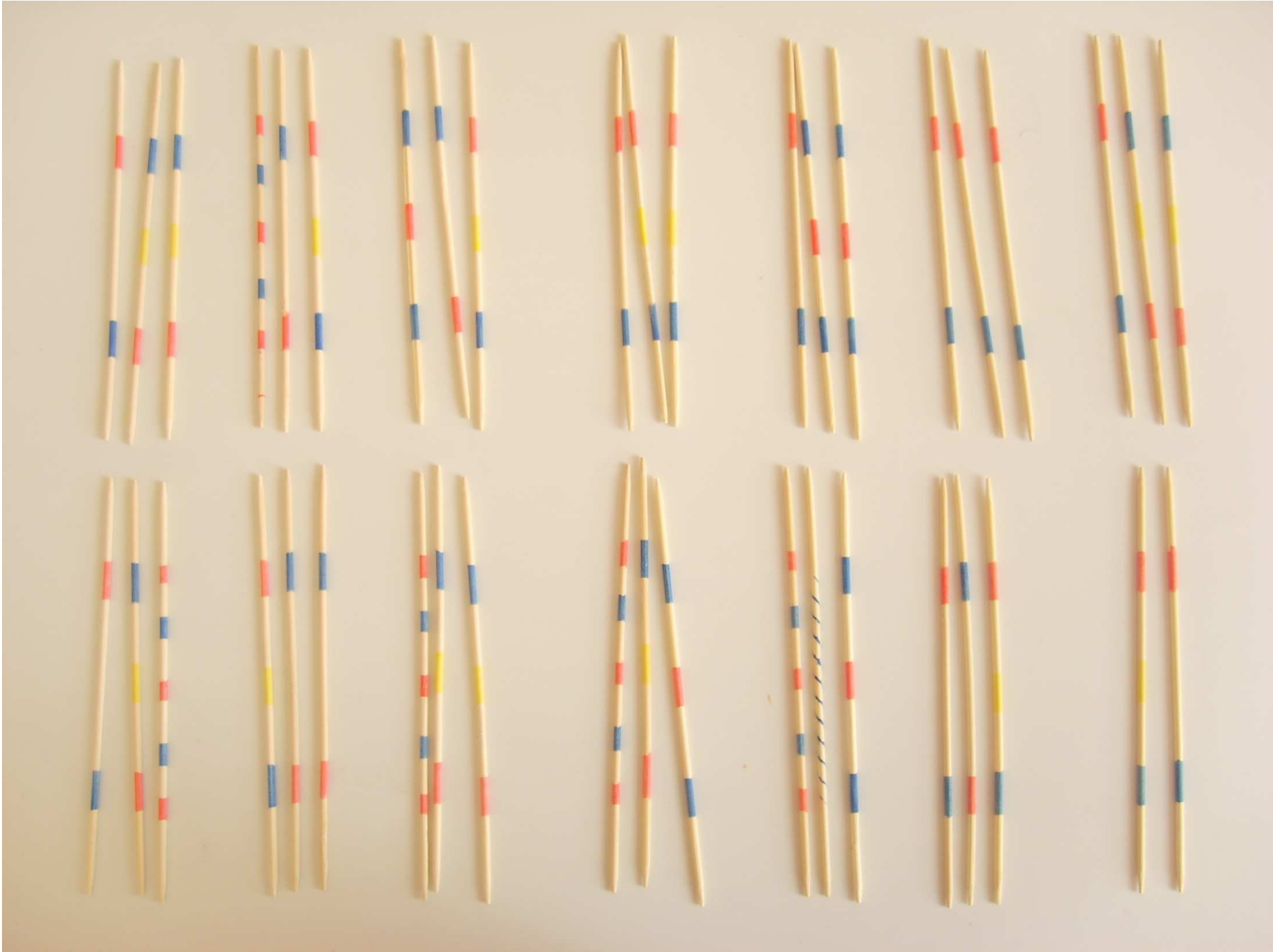
Cinq principes pour le comptage

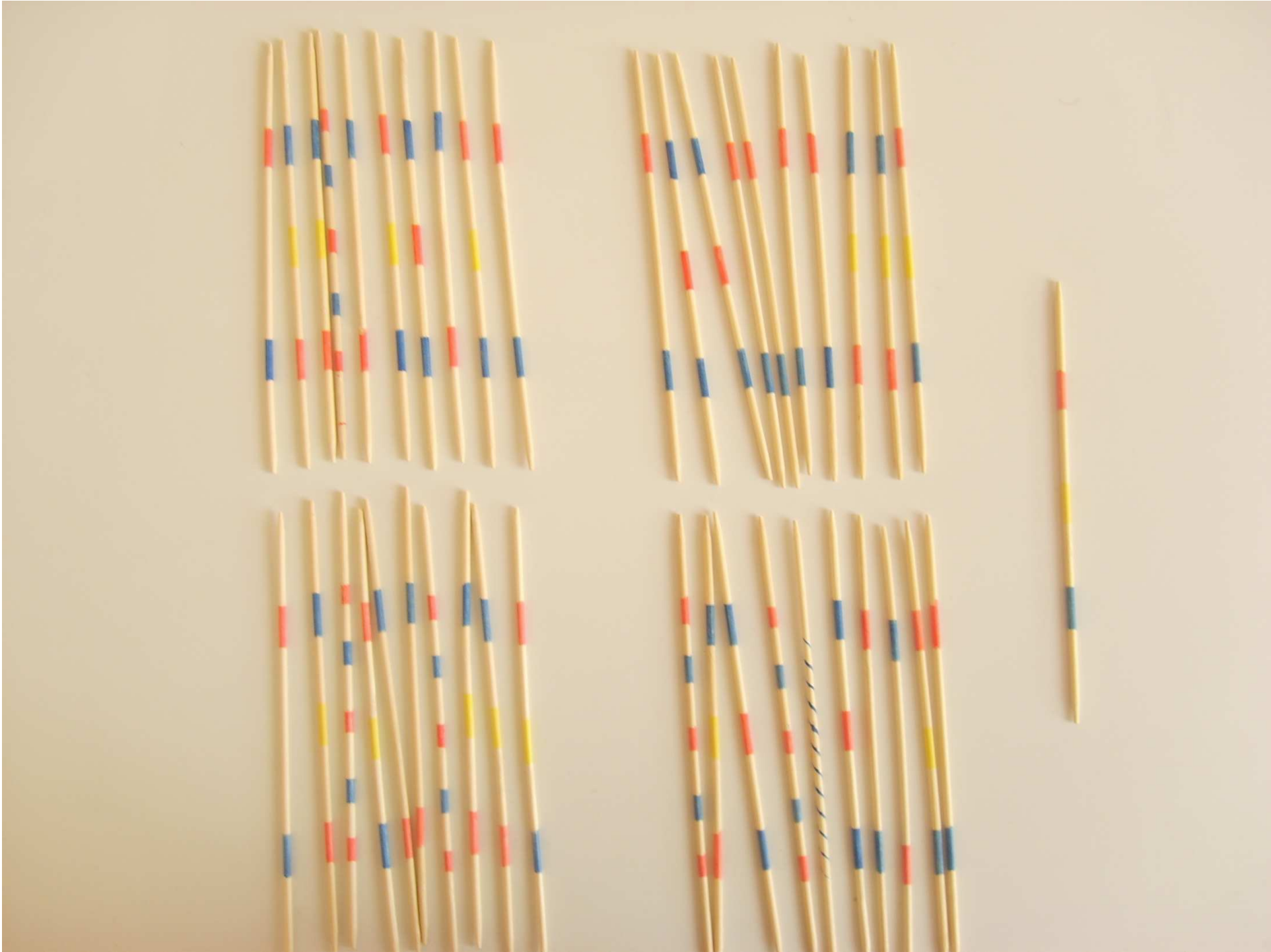
4

- Principe d'indifférence de l'ordre : les unités peuvent être comptées dans n'importe quel ordre...
- L'ordre des objets à dénombrer n'a pas d'importance alors que les mots qui servent dans cette situation sont en ordre !
- En revanche, l'organisation spatiale des objets dénombrés revêt une importance qui peut s'avérer fondamentale.

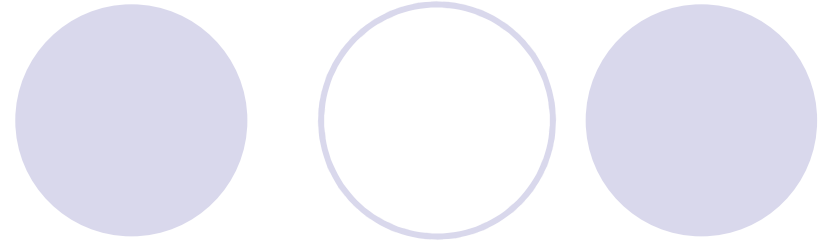
*R. Gelman - 1983
« Les bébés et le calcul »*



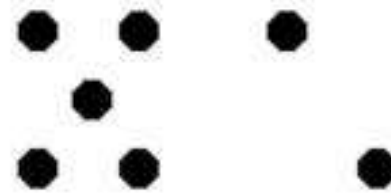
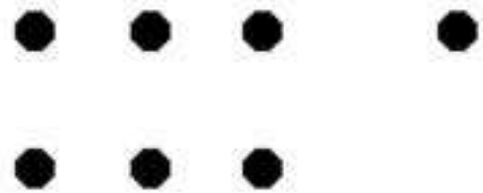




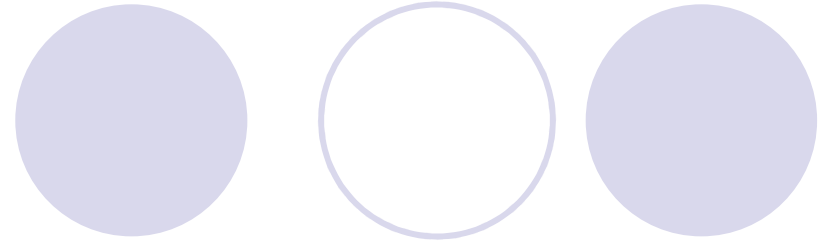
INTERMÈDE



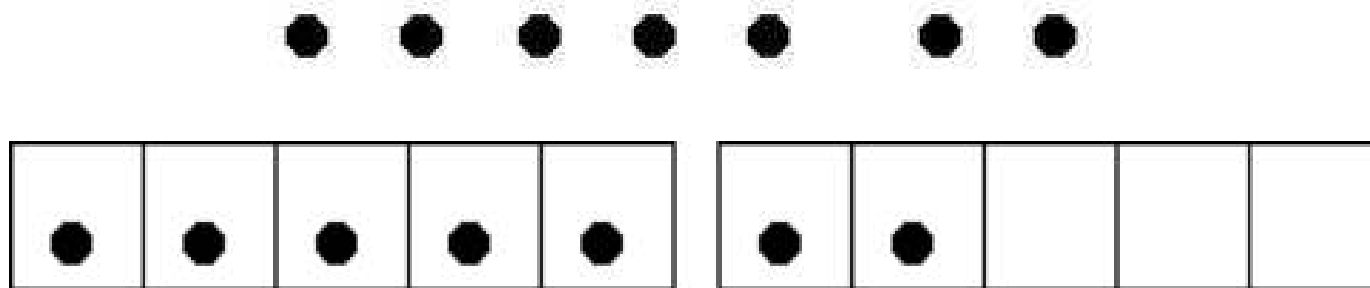
- Les représentations des nombres
 - les constellations du dé



INTERMÈDE



- Les représentations des nombres
 - la forme linéaire

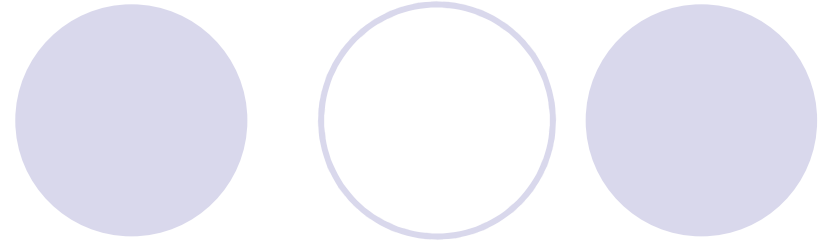


INTERMÈDE

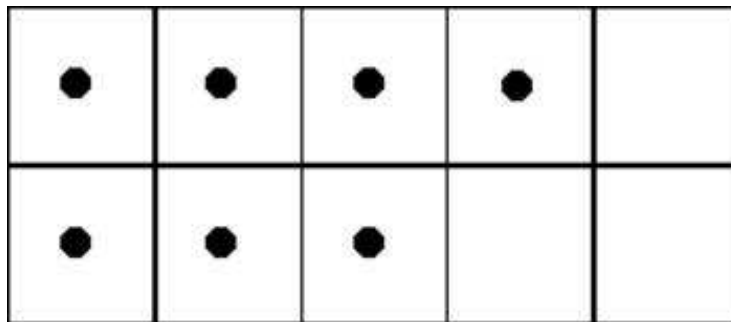
- Les représentations des nombres
 - avec les doigts



INTERMÈDE



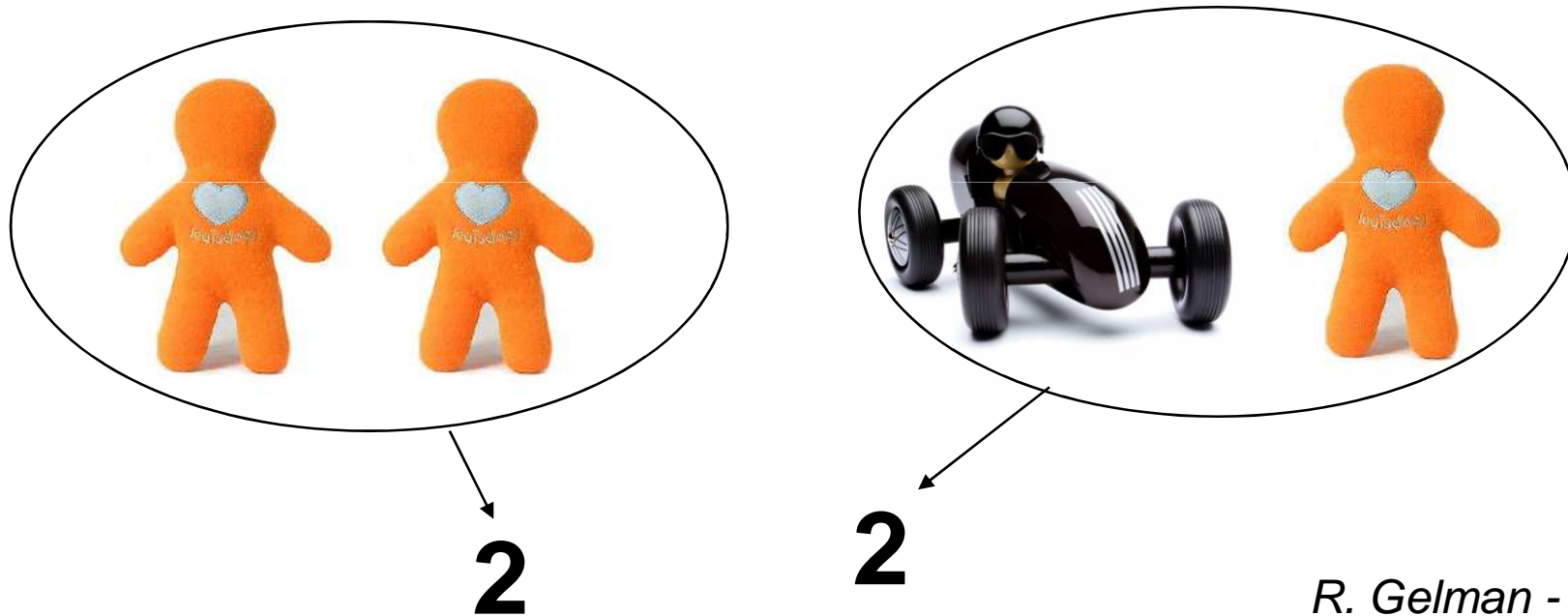
- Les représentations des nombres
 - avec les « cartapoints »





Cinq principes pour le comptage 5

- Principe d'**abstraction** : toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble.



*R. Gelman - 1983
« Les bébés et le calcul »*

Conséquences pour l'enseignement

- Lorsque les enfants comptent, ils doivent mettre en œuvre tous les principes simultanément, de façon coordonnée.
- Ils sont alors « submergés par la tâche » !
- Les erreurs constatées seraient des erreurs d'exécution et pas de **compréhension**...
- Il faut multiplier les situations de comptage et de dénombrement sans négliger le développement de la compréhension → **situations problèmes**
- **APPRENDRE, c'est RÉFLÉCHIR...**

Les activités à conduire en classe

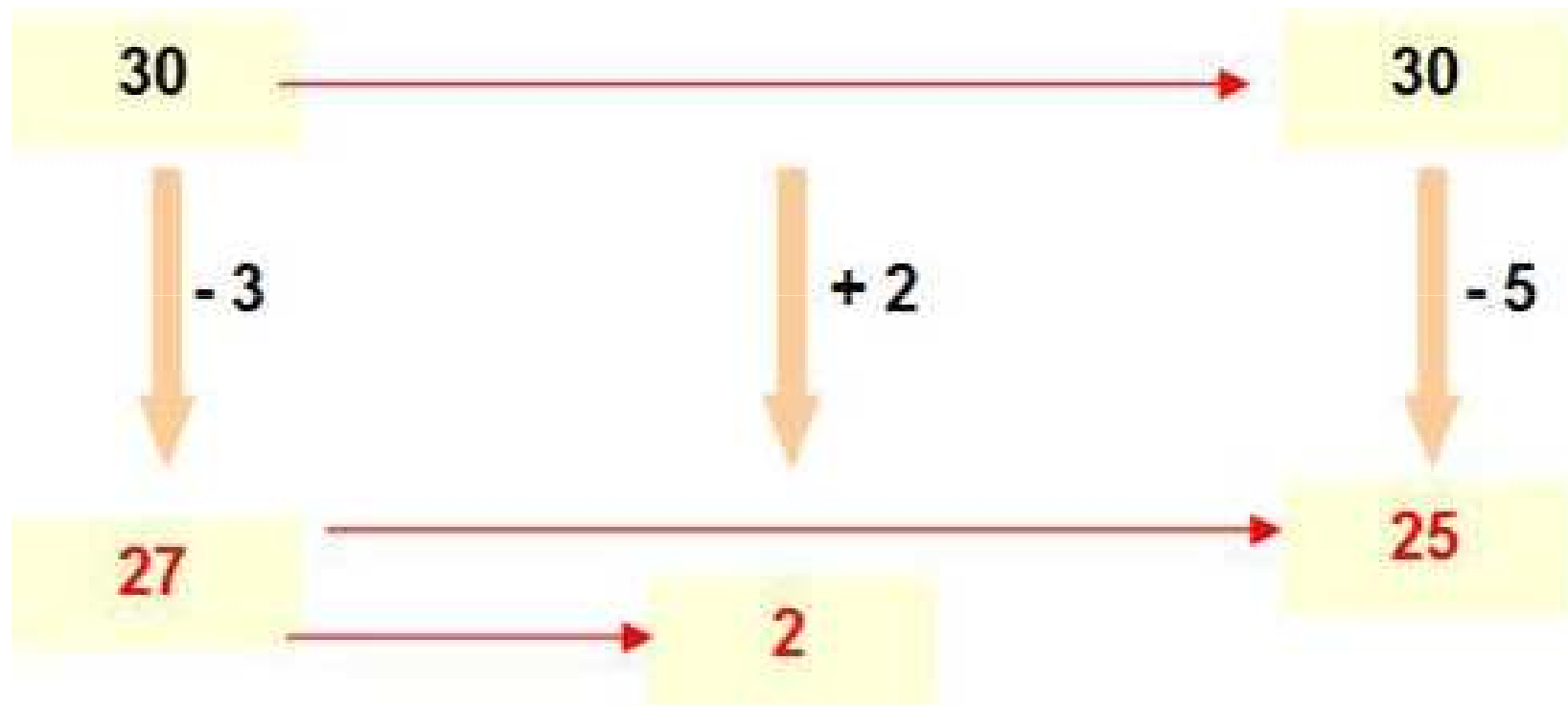
<u>Dénombrer</u> Collection /Enumération	<u>Décomposer</u>	<u>Ranger</u> L'ordre	<u>Représenter</u> Désignation
<ul style="list-style-type: none"> ❖ Estimer les quantités. ❖ Reconnaître des petites quantités. ❖ Dénombrer des petites quantités. ❖ Réaliser une correspondance terme à terme. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Décomposer des nombres. ❖ Réaliser une distribution. ❖ Rechercher des compléments. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Comparer 2 collections. ❖ Comparer des collections. ❖ Mémoriser la suite des nombres (dans les 2 sens). 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Associer différentes représentations du nombre (digitale, collection, écriture chiffrée, constellation) et les faire varier. ❖ Lire et écrire des nombres.
<ul style="list-style-type: none"> ❖ Dénombrer et mémoriser des quantités. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Résoudre des problèmes de partage. ❖ Résoudre des problèmes de quantités. 		

INTERMÈDE

A decorative graphic consisting of five circles arranged horizontally. The first circle is solid light blue. The second circle is white with a light blue outline. The third circle is solid light blue. The fourth circle is white with a light blue outline. The fifth circle is solid light blue.

- Trois jeunes gens prennent leur petit déjeuner dans un bar. Ils doivent payer 30 euros et donnent chacun un billet de 10 euros. La patronne, charmante, décide de leur faire une réduction de 5 euros.
- Le serveur prend donc 5 pièces de 1 euro, mais, ne pouvant les partager en trois il décide subrepticement de glisser 2 euros dans sa poche et donne généreusement une pièce de 1 euro à chacun des trois jeunes gens.

Réponse



Les thèses de R.Brissiaud (1989)

- Pas d'opposition entre comptage et calcul
- Rétablir l'équilibre ordinal/cardinal
- Le **calcul** comme accélérateur d'apprentissage du comptage → nécessité de développer des compétences dès le plus jeune âge
- perception d'une quantité par la somme de ses parties (\neq sur-comptage)

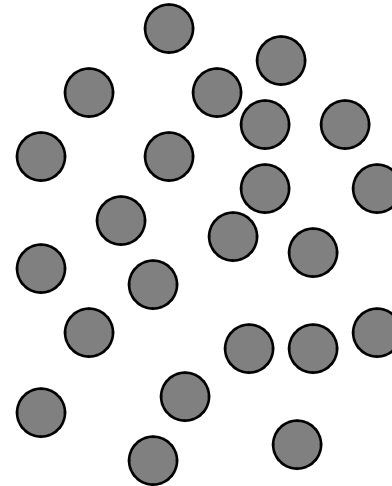
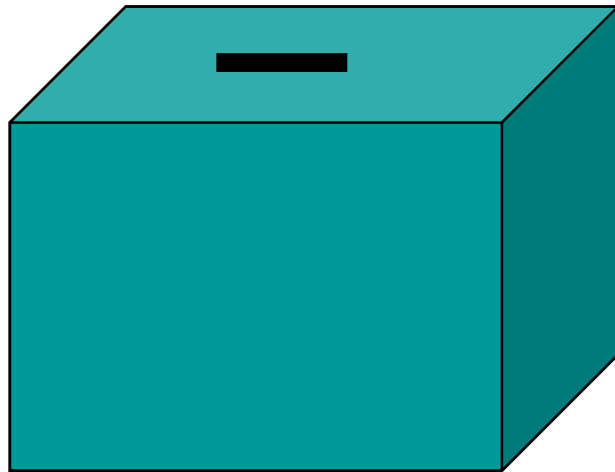
Les thèses de R.Brissiaud (1989)

- Situation de G.Vergnaud
- GS et ZEP
- avril

	dit compter jusqu'à...	Compte jusqu'à...	Ei = 4	
Clément	« un petit peu loin »	26	5 ; 4	C'est 4 parce que quand vous avez mis les 2 autres, ça fait 6.
Chelsea	?	14	9 ; 11	Je ne sais parce que je n'ai pas vu...

Pour cette dernière enfant, le nombre n'est rien,
il ne représente rien...

Six dans la boîte (en GS)...



- deux joueurs
- 1, ou 2 jetons dans la boîte à chaque coup.



Six dans la boîte : 3 problèmes

- Se souvenir de ce qui est mis à chaque coup
Plusieurs solutions... dont les nombres mémoriser
- Connaître le contenu de la boîte
*Vers l'addition
calculer*
- Savoir s'il est possible de gagner au coup suivant
*Vers le complément
anticiper*



Six dans la boîte : les procédures

- Dessin et dénombrement
- Recomptage mental ou aidé (doigts...)
- Surcomptage mental ou aidé (doigts...)
- Décomptage mental ou aidé (doigts...)
- Double comptage de ... à ... mental ou aidé
- *Utilisation de résultats déjà connus*

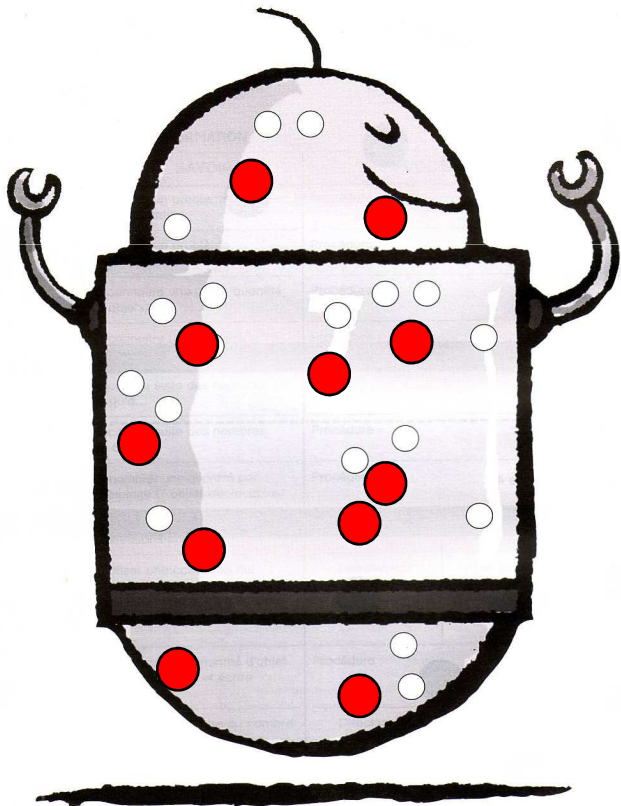
À quoi servent les nombres ?

à mémoriser des quantités

CapMaths
3
UNITÉ 1 - Séance 4
Guide - p.13

© Hatier 2005 - Reproduction autorisée pour une classe seulement.

Le Ziglotron



Un problème de référence

**Préparer juste ce qu'il
faut de gommettes
pour réparer le robot**

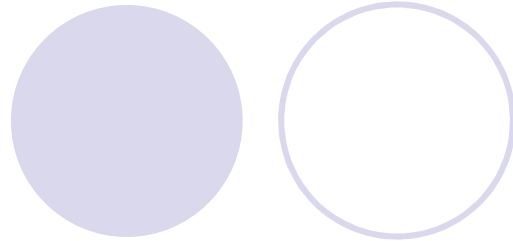
*Un type de problème
à faire vivre
en maternelle et au CP*

d'après Cap maths CP

En grande section et au début du CP

Les gommettes sont dans une boîte éloignée du robot

- Aller chercher, **à distance**, juste assez de gommettes pour réparer le robot (allers-retours possibles).
- Aller chercher, **à distance, en une seule fois**, juste assez de gommettes pour réparer le robot.
- Les **demander oralement**
- Les **commander par écrit**



Le travail
sur fiche
ne remplace pas
l'expérience...
mais peut
la prolonger.

J.François BUTEL - 26 janvier et 2 février 2016

lundi mardi mercredi jeudi vendredi samedi dimanche

Juste assez de boutons (1)

1 Entoure **juste assez** de boutons pour compléter chaque ziglotron.

.....

2 Colorie le personnage qui a **juste assez** de boutons pour compléter le ziglotron.

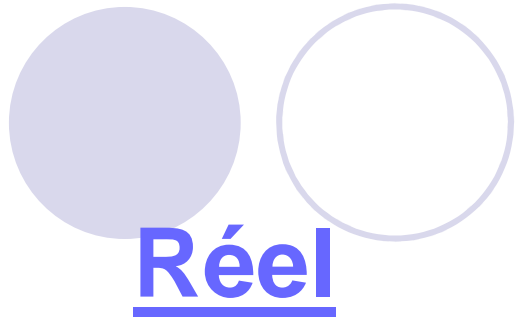
quinzaine ① séance ④

sept • 7



Les thèses de R.Brissiaud (1989)

- Situations D.Valentin



Réel

Favorise
l'**appropriation**
de la situation
et du problème

Permet la **validation**
de la réponse ou
d'une procédure

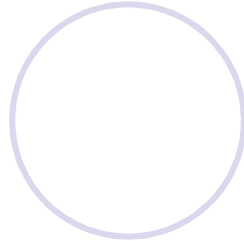
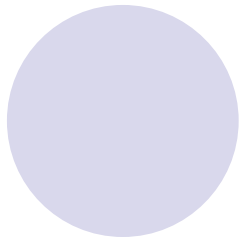


Anticiper

Incite à l'expérience
mentale

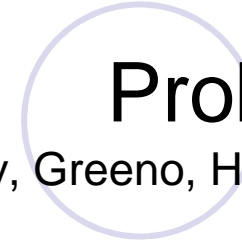
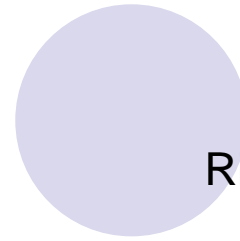
Oblige à **élaborer**
des procédures





A

Jean avait 3 billes. Paul lui a donné 5 billes.



B

Jean avait 8 billes. Il en a donné 5 à Paul.

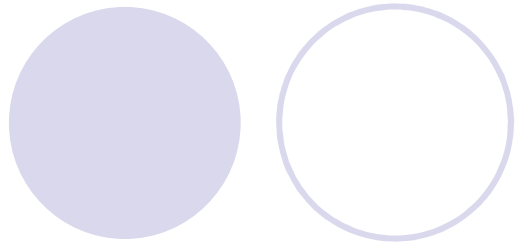
Problèmes

Riley, Greeno, Heller..., 1983

C

Jean avait 3 billes. Paul lui en a donné. Maintenant, il a 8 billes.

	A	B	C
GS	87 %	100 %	61 %
CP	100 %	100 %	56 %



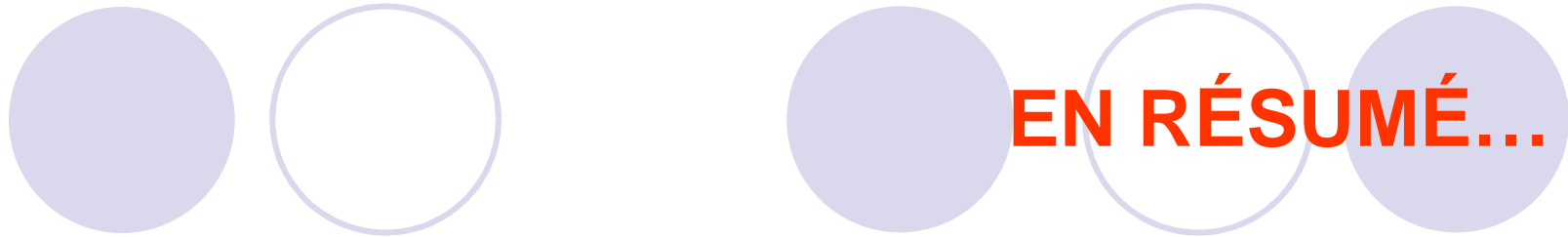
maternelle

- Donner du sens aux nombres (problèmes)
- Consolider des compétences « techniques », surtout orales



CP

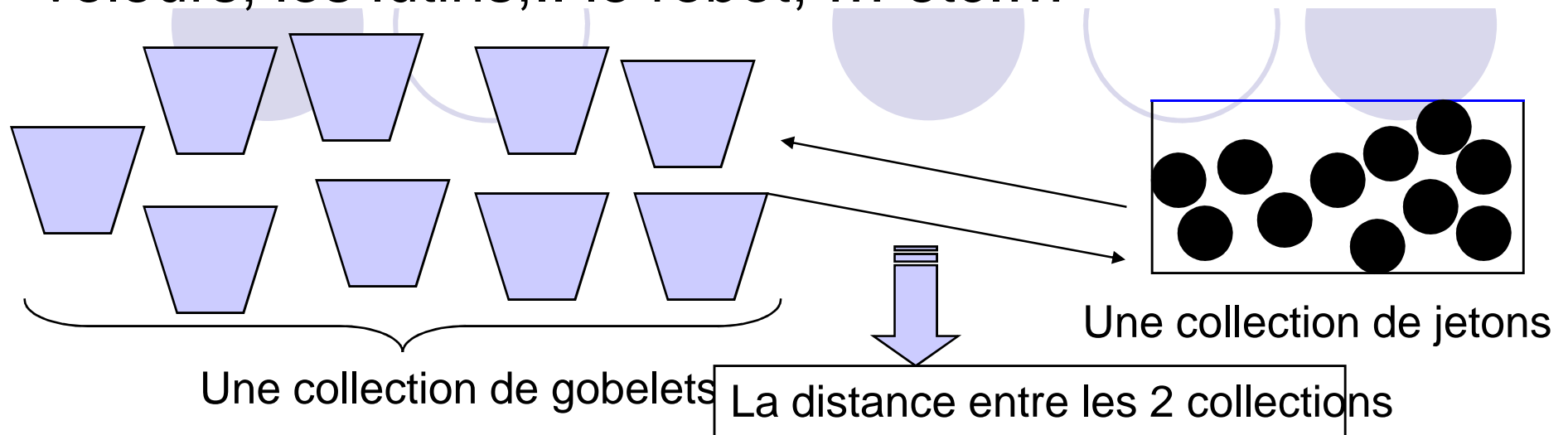
- Poursuivre le travail sur le sens
- Structurer et étendre les compétences techniques
- Structurer les désignations écrites, puis orales



Construire les nombres et la numération

- dans un rapport avec des expériences réelles...
- ...en réservant l'utilisation de fiches écrites aux phases d'entraînement individuel (et encore ! pour l'école maternelle)

Un exemple fondamental: « la situation des ... voleurs, les lutins,.. le robot, ... etc.... »



Consigne: « il faut aller chercher juste ce qu'il faut de jetons, au retour il doit y avoir un jeton dans chaque gobelet et pas de gobelet vide... »

Les variables de la situation: (la situation se propose en PS, MS, GS, CP)

- Le nombre de gobelets (ce nombre est à adapter en fonction des capacités des élèves (var. pédagogique), mais également pour faire évoluer les procédures (var. didactique: collections-témoins, puis nombres).
- Le nombre d'allers et retours (3, puis 2, puis 1).
- La distance spatiale et temporelle entre les deux collections.
- L'organisation et le choix du matériel (gobelets, quadrillage en robot, grappes de raisin, wagons de voyageurs, coccinelles, etc...).
- Le type de communication (élève seul, un banquier, par oral, par écrit)...

D'autres supports:

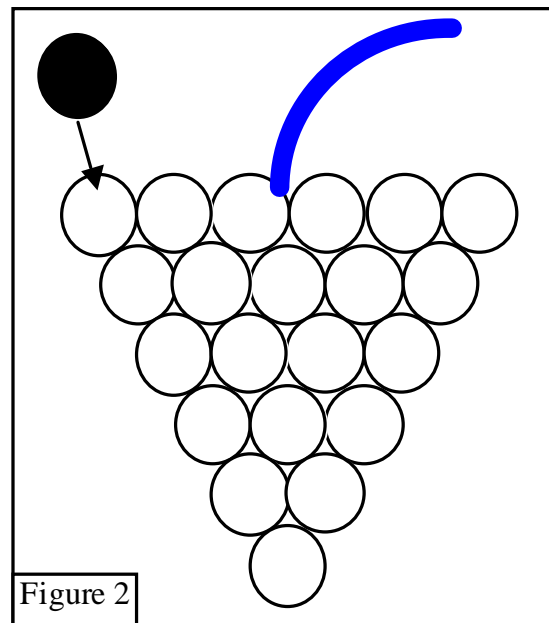
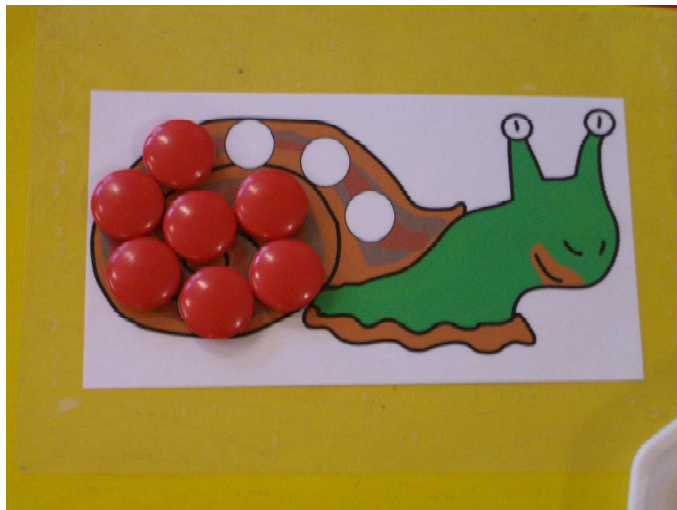
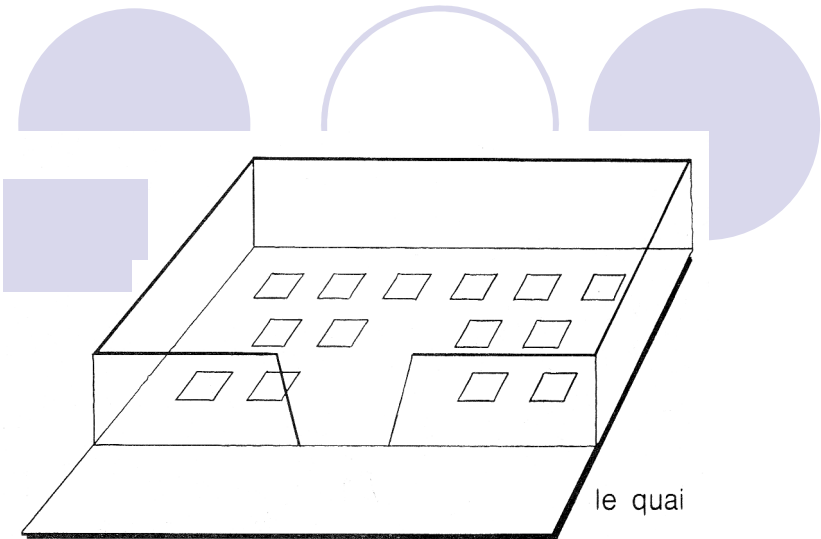
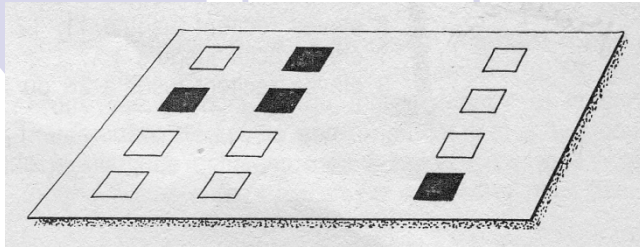


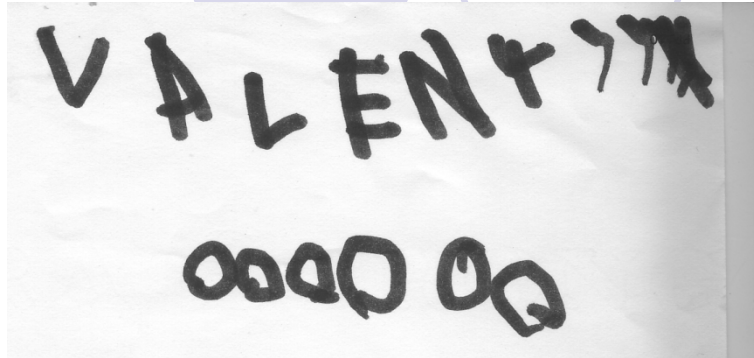
Figure 2



Des MS au travail!!

D'autres supports encore, pour les PS et MS...

La variable « banquier », permet le passage à la schématisation et à l'écrit, par exemple:



La schématisation par une collection-témoin.



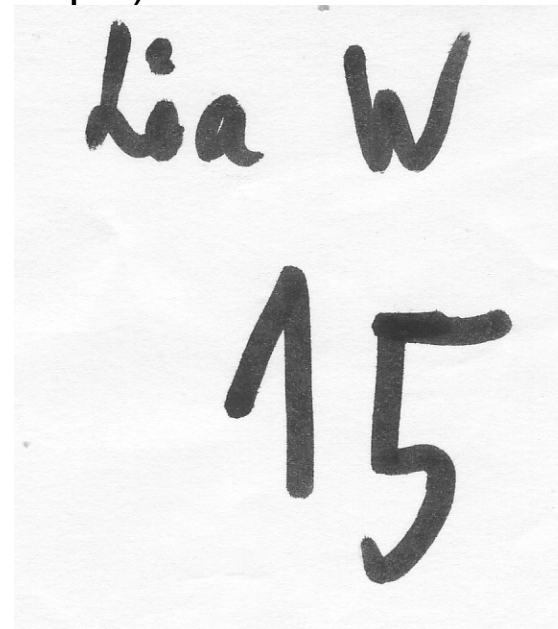
Le qualitatif résiste...

(Vous remarquez l'inversion momentanée de l'écriture du chiffre).

Marie



Le passage à l'écrit (vous remarquerez la trace de la bande numérique).



C'est parfait!!

Exemple 2: en PS et MS; « les lutins »:

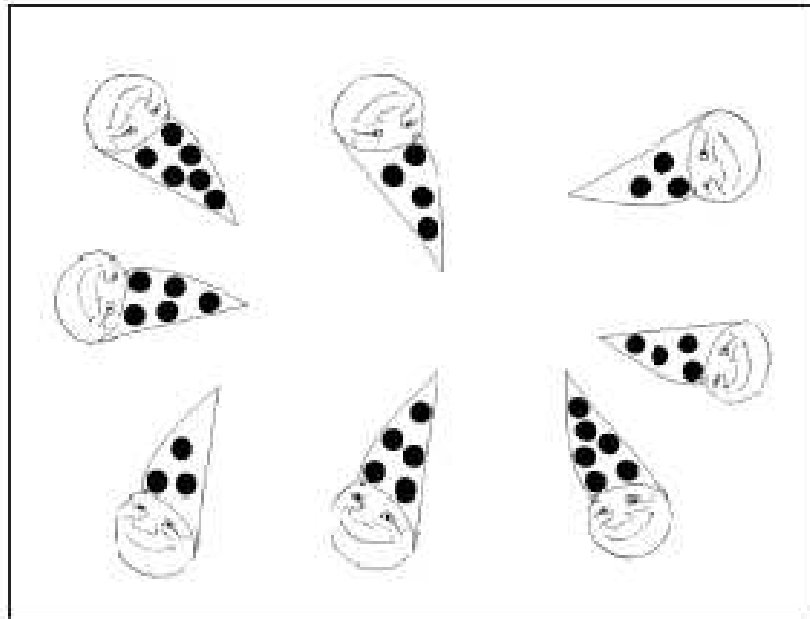


Figure 1 : exemple de plan de jeu
Les quantités varient de 3 à 6.

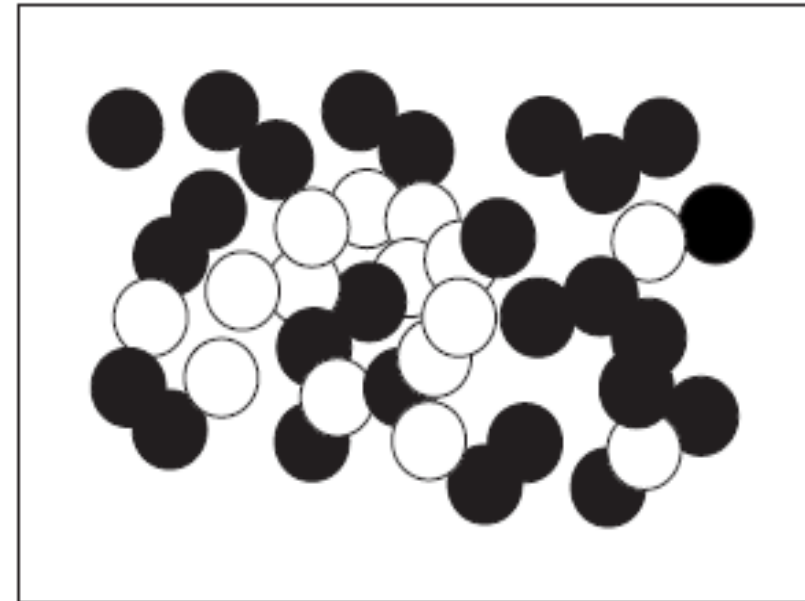


Figure 2 : pions dans des caisses
placées sur une table éloignée
de l'espace de jeu

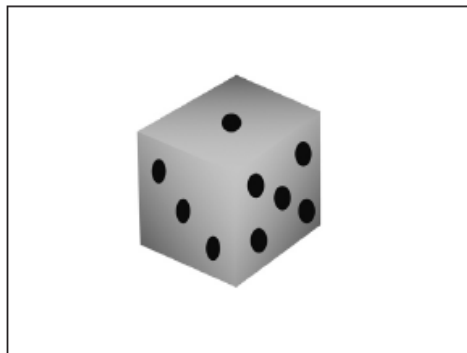


Figure 3 : le dé
configuré

Etape 1: lancer le dé, reconnaître le bonnet, le couvrir avec des jetons.

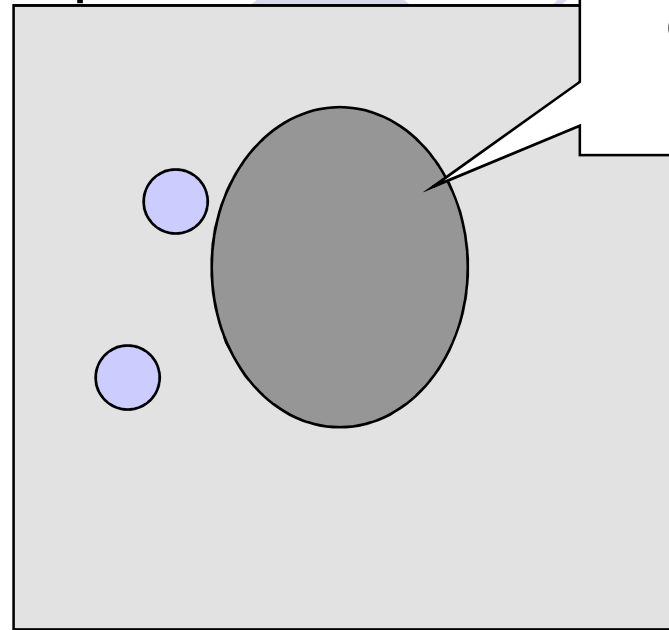
Etape 2: lancé le dé, reconnaître le bonnet, aller chercher loin les jetons qui conviennent.

Variables: la disposition des points sur les bonnets...Et bien d'autres...

Exemple 3, en MS; « le chapeau » :



Exemple de petits cadeaux



On place le chapeau.

Etape 1: Après avoir dénombré les cadeaux ou les pions, un chapeau vient cacher une partie de la collection.

Les élèves doivent deviner le nombre d'objets qui sont cachés....

Etape 2: Il doivent également aller chercher des jetons, pareil... pas plus, pas moins... que les pions qui sont cachés → validation.

Cette situation relève de la structure « additive et soustractive »:

$$E_i = \text{nombre de pions} \xrightarrow{T^- = \text{nombre de pions disparus}} E_f = \text{nombre de pions visibles}$$